

10º Concurso de Ciencias Básicas de la ANFEI  
Ronda final de MATEMÁTICAS

Reactivo 1. Tiempo: 10 minutos

Como parte de los planes de expansión de una empresa, se construirá un almacén en una región de su terreno, cuya topografía está descrita por la función  $z = \frac{x^2 \sin(2y)}{32}$ . Tu trabajo consiste en diseñar un sistema de drenaje que siga el recorrido que naturalmente tendría la bajada de la lluvia.

- Si te encuentras en un punto con coordenadas  $\left(\frac{1}{2}, 150\right)$  en el plano  $xy$  ¿En qué dirección correrá la lluvia en ese punto?
- Con el objetivo de mostrar en un plano la trayectoria de la tubería, estima la trayectoria de manera explícita que seguiría la lluvia en un punto cualquiera  $xy$ .
- Si se va a construir una carretera nivelada en la elevación de 100, ¿Qué forma tendría la carretera?

Solución:

- La lluvia debería seguir la dirección contraria a la del gradiente:

$$-\nabla z = -\langle z_x, z_y \rangle$$

Donde  $z_x = \frac{x \sin 2y}{16}$  y  $z_y = \frac{x^2 \cos 2y}{16}$

$$-\nabla z \left(150, \frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{150 \sin 1}{16}, \frac{150^2 \cos 1}{16}\right) = (-7.89, -759.8)$$

- La trayectoria en un mapa de nivel puede ser calculada como  $\frac{dy}{dx} = \frac{z_y}{z_x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\tan 2y}$  por separación de variables podemos resolver

$$\begin{aligned} \tan 2y \, dy &= x \, dx \\ -\frac{1}{2} \ln(\cos 2y) &= -\frac{x^2}{2} + c \\ y &= \pm \frac{1}{2} \cos^{-1}(ke^{-x^2}) \end{aligned}$$

Donde  $k$  es una constante

- Se requiere una curva de nivel a 100 m

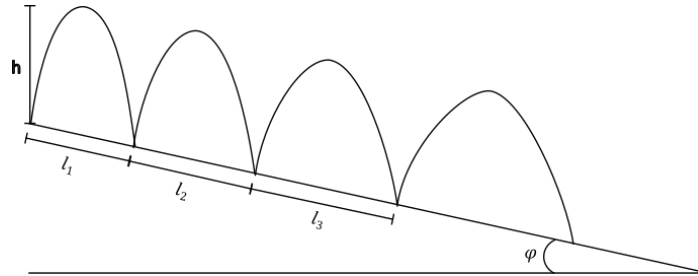
$$100 = \frac{x^2 \sin(2y)}{32}$$

$$\sin(2y) = \frac{3200}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{2} \sinh\left(\frac{3200}{x^2}\right)$$

Reactivo 2. Tiempo: 15 minutos.

Se deja caer una pelota desde una altura  $h$  sobre un plano inclinado con ángulo  $\varphi$  con la horizontal. Los sucesivos choques que tiene la pelota sobre el plano son perfectamente elásticos. ¿Qué relaciones existe entre las distancias  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  de los puntos de contacto?



Solución:

Al analizar las condiciones iniciales

$$V_f = \sqrt{V_0^2 + 2gh} = \sqrt{2gh}$$

$$V_f^2 = V_0^2 + 2gh = \sqrt{2gh}$$

$$g_x = g \sin \varphi$$

$$V_0 = \sqrt{2gh}$$

$$g_y = g \cos \varphi$$

Analizando el primer rebote

$$l_1 = \frac{1}{2} a_x t_1^2 + V_{ox} t_1$$

Sustituyendo las condiciones iniciales

$$l_1 = \frac{1}{2} g \sin \varphi t_1^2 + V_0 \sin \varphi t_1$$

$$0 = -\frac{1}{2} g \cos \varphi t_1^2 + V_0 \cos \varphi t_1$$

$$t_1 = \frac{2V_0}{g}$$

$$l_1 = \frac{1}{2} g \sin \varphi \left( \frac{2V_0}{g} \right)^2 + V_0 \sin \varphi \left( \frac{2V_0}{g} \right)$$

$$l_1 = \left( \frac{2V_0^2}{g} \right) \sin \varphi + \frac{2V_0^2}{g} \sin \varphi$$

$$l_1 = \frac{4V_0^2}{g} \operatorname{sen}\varphi = \frac{4(2gh)}{g} \operatorname{sen}\varphi = 8h \operatorname{sen}\varphi$$

Obteniendo la velocidad final de la primera parte,

$$V_{f1x} = a_x t_1 + V_{0x} = g \operatorname{sen}\varphi \left( \frac{2V_0}{g} \right) + V_0 \operatorname{sen}\varphi = 3V_0 \operatorname{sen}\varphi$$

$$V_{f1y} = a_y t_1 + V_{0y} = -g \cos\varphi \left( \frac{2V_0}{g} \right) + V_0 \cos\varphi = -V_0 \cos\varphi$$

Condiciones iniciales para el segundo rebote

$$V_{02x} = V_{f1x} = 3V_0 \operatorname{sen}\varphi$$

$$V_{02y} = -V_{f1y} = V_0 \cos\varphi$$

Analizando el segundo rebote

$$l_2 = \frac{1}{2} a_x t_2^2 + V_{0x} t_2$$

Sustituyendo las condiciones iniciales

$$l_2 = \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\varphi t_2^2 + V_0 \operatorname{sen}\varphi t_2$$

$$0 = -\frac{1}{2} g \cos\varphi t_2^2 + V_0 \cos\varphi t_2$$

$$t_2 = \frac{2V_0 \cos\varphi}{g \cos\varphi} = \frac{2V_0}{g}$$

$$l_2 = \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\varphi \left( \frac{2V_0}{g} \right)^2 + 3V_0 \operatorname{sen}\varphi \left( \frac{2V_0}{g} \right)$$

$$l_2 = \left( \frac{2V_0^2}{g} \right) \operatorname{sen}\varphi + \frac{6V_0^2}{g} \operatorname{sen}\varphi$$

$$l_2 = \frac{8V_0^2}{g} \operatorname{sen}\varphi = \frac{8(2gh)}{g} \operatorname{sen}\varphi = 16h \operatorname{sen}\varphi$$

Obteniendo la velocidad final de la segunda parte,

$$V_{f2x} = a_x t_2 + V_{0x} = g \operatorname{sen}\varphi \left( \frac{2V_0}{g} \right) + 3V_0 \operatorname{sen}\varphi = 5V_0 \operatorname{sen}\varphi$$

$$V_{f2y} = a_y t_2 + V_{0y} = -g \cos\varphi \left( \frac{2V_0}{g} \right) + V_0 \cos\varphi = -V_0 \cos\varphi$$

Condiciones iniciales para el tercer rebote

$$V_{03x} = V_{f2x} = 5V_0 \operatorname{sen}\varphi$$

$$V_{03y} = -V_{f2y} = V_0 \cos\varphi$$

$$t_3 = \frac{2V_0 \cos \varphi}{g \cos \varphi} = \frac{2V_0}{g}$$

Analizando el tercer rebote

$$l_3 = \frac{1}{2} g \operatorname{sen} \varphi \left( \frac{2V_0}{g} \right)^2 + 5V_0 \operatorname{sen} \varphi \left( \frac{2V_0}{g} \right)$$

$$l_3 = \left( \frac{2V_0^2}{g} \right) \operatorname{sen} \varphi + \frac{10V_0^2}{g} \operatorname{sen} \varphi$$

$$l_3 = \frac{12V_0^2}{g} \operatorname{sen} \varphi = \frac{12(2gh)}{g} \operatorname{sen} \varphi = 24h \operatorname{sen} \varphi$$

Obteniendo las razones solicitadas

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{8h \operatorname{sen} \varphi}{16h \operatorname{sen} \varphi} = \frac{1}{2}$$

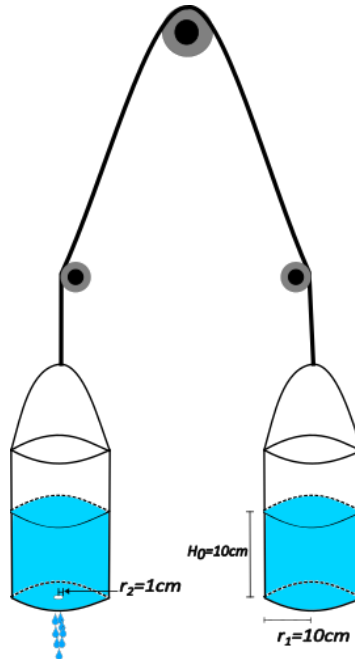
$$\frac{l_2}{l_3} = \frac{16h \operatorname{sen} \varphi}{24h \operatorname{sen} \varphi} = \frac{2}{3}$$

$$l_1 : l_2 : l_3$$

$$1 : 2 : 3$$

Reactivo 3. Tiempo: 15 minutos

Dos recipientes idénticos tienen inicialmente la misma cantidad de agua y están unidos mediante una cuerda como se ve en la figura. Si se perfora el fondo del recipiente de la izquierda, ¿Cuál es la magnitud de la aceleración que experimentan los recipientes a los 2 s?. Considere recipientes cilíndricos de radio  $r_1 = 10 \text{ cm}$ , altura del agua  $H_0 = 10 \text{ cm}$  y radio de la perforación  $r_2 = 1 \text{ cm}$ .



**Solución:**

$$s_1 = \pi r_1^2 = \pi \left( \frac{1}{10} \right)^2 = \frac{\pi}{100} \text{ m}$$

$$s_2 = \pi r_2^2 = \pi \left( \frac{1}{100} \right)^2 = \frac{\pi}{10000} \text{ m}$$

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Dado que  $P_1 = P_2$

$$\frac{1}{2} v_2^2 = g y_1 - g y_2 + \frac{1}{2} v_1^2$$

Definiendo  $h = y_1 - y_2$

$$v_2^2 = 2gh + v_1^2$$

$$v_2 = \sqrt{2gh + v_1^2}$$

Utilizando la ecuación de continuidad

$$v_1 s_1 = v_2 s_2$$

Elevando al cuadrado

$$v_1^2 s_1^2 = v_2^2 s_2^2$$

Sustituyendo  $v_2$

$$v_1^2 s_1^2 = (2gh + v_1^2) s_2^2$$

$$v_1^2 (s_1^2 - s_2^2) = 2gh s_2^2$$

$$v_1^2 = \frac{2gh s_2^2}{s_2^2 \left( \frac{s_1^2}{s_2^2} - 1 \right)}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{s_1^2}{s_2^2} - 1}}$$

Definiendo  $\beta = \frac{s_1^2}{s_2^2} - 1 = \frac{\frac{\pi}{100}}{\frac{\pi}{10000}} - 1 = 99$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\beta}}$$

Analizando el sistema, tenemos que

$$v_1 = -\frac{dh}{dt}$$

$$-\frac{dh}{dt} = \sqrt{\frac{2gh}{\beta}}$$

$$-\frac{dh}{\sqrt{h}} = \sqrt{\frac{2g}{\beta}} dt$$

$$-\int_{H_0}^h \frac{dh}{\sqrt{h}} = \int_0^t \sqrt{\frac{2g}{\beta}} dt$$

$$-2\sqrt{h}|_{H_0}^h = \sqrt{\frac{2g}{\beta}} t \Big|_0^t$$

$$2\sqrt{H_0} - 2\sqrt{h} = \sqrt{\frac{2g}{\beta}} t$$

$$1 - \sqrt{\frac{h}{H_0}} = \sqrt{\frac{2g}{4\beta H_0}} t$$

$$\sqrt{\frac{h}{H_0}} = 1 - \sqrt{\frac{g}{2\beta H_0}} t$$

$$h = H_0 \left( 1 - \sqrt{\frac{g}{2\beta H_0}} t \right)^2$$

Considerando la suma de fuerzas

$$T - W = F$$

$$m_1 g - m_2 g = ma$$

Dado que

$$m_1 = \rho V_1 = \rho s_1 h = \rho s_1 H_0 \left( 1 - \sqrt{\frac{g}{2\beta H_0}} t \right)^2$$

$$m_2 = \rho V_2 = \rho s_1 H_0$$

$$m = m_2$$

$$\rho s_1 H_0 \left( 1 - \sqrt{\frac{g}{2\beta H_0}} t \right)^2 g - \rho s_1 H_0 g = \rho s_1 H_0 a$$

$$\left( \left( 1 - \sqrt{\frac{g}{2\beta H_0}} t \right)^2 - 1 \right) g = a$$

$$\left( 1 - 2\sqrt{\frac{g}{2\beta H_0}} t + \frac{g}{2\beta H_0} t^2 - 1 \right) g = a$$



$$\left( \frac{g}{2\beta H_0} t^2 - \sqrt{\frac{2g}{\beta H_0}} t \right) g = a$$

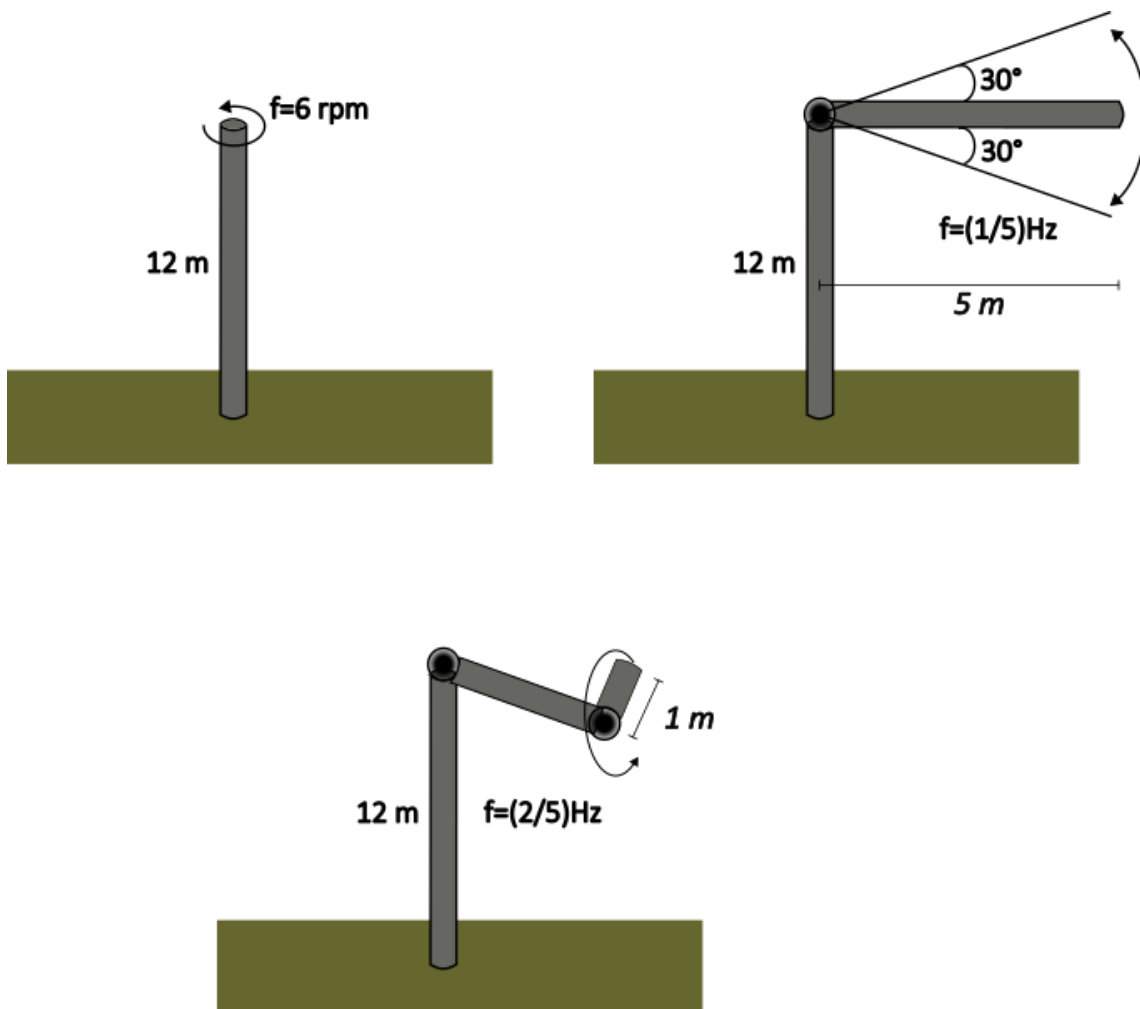
Sustituyendo los valores

$$a = \left( \frac{9.8}{2(99)\left(\frac{1}{10}\right)} 2^2 - \sqrt{\frac{2(9.8)}{(99)\left(\frac{1}{10}\right)}} 2 \right) 9.8$$
$$a = -8.176 \text{ m/s}^2$$

Por lo que la aceleración que experimentan los recipientes es de  $8.176 \text{ m/s}^2$ .

Reactivo 4. Tiempo: 20 minutos

Un juego mecánico que consta de tres movimientos como se muestran en las figuras, sufre un percance de tal forma que un usuario sale despedido del mismo a los 8 segundos de haber iniciado el juego, determine el tiempo que tarda en caer al suelo si se sabe que en un tiempo  $t = 0$  el brazo que tiene movimiento vertical se encuentra horizontal y se desplaza hacia abajo. Longitud del brazo de apoyo  $12\text{ m}$  y gira a  $6\text{ rpm}$ , longitud del brazo horizontal  $5\text{ m}$  y gira a  $\left(\frac{1}{5}\right)\text{ Hz}$  y brazo libre  $1\text{ m}$  con una frecuencia de  $\left(\frac{2}{5}\right)\text{ Hz}$ .



Solución:

Vector que nos une a la punta de la base

$$f_0 = 6 \text{ rpm} = \frac{1}{10} \text{ Hz} \quad f_1 = \frac{1}{5} \text{ Hz} \quad f_2 = \frac{2}{5} \text{ Hz}$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{5} \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{5} \quad \omega_2 = \frac{4\pi}{5}$$

$$\varphi = \omega_0 t = \frac{\pi}{5} t \quad \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{5} t\right) \quad \alpha = \frac{4\pi}{5} t$$

$$\vec{r}_1 = \langle 5 \sin \theta \cos \varphi, 5 \sin \theta \sin \varphi, 12 + 5 \cos \theta \rangle$$

Estableciendo un sistema de coordenadas perpendiculares al brazo basadas en el sistema de coordenadas esféricas.

$$\hat{X} = \langle -\sin \varphi, \cos \varphi, 0 \rangle$$

$$\hat{Y} = \langle \cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta \rangle$$

Escribiendo el giro del 2do brazo

$$\vec{r}_2 = \cos \alpha \hat{X} + \sin \alpha \hat{Y}$$

$$\vec{r}_2 = \cos \alpha \langle -\sin \varphi, \cos \varphi, 0 \rangle + \sin \alpha \langle \cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta \rangle$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 = & \langle 5 \sin \theta \cos \varphi, 5 \sin \theta \sin \varphi, 12 + 5 \cos \theta \rangle \\ & + \langle -\sin \varphi \cos \alpha + \cos \theta \cos \varphi \sin \alpha, \cos \varphi \cos \alpha + \cos \theta \sin \varphi \sin \alpha, -\sin \theta \sin \alpha \rangle \end{aligned}$$

$$\vec{r}_2 = \langle -\sin \varphi \cos \alpha + \cos \theta \cos \varphi \sin \alpha, \cos \varphi \cos \alpha + \cos \theta \sin \varphi \sin \alpha, -\sin \theta \sin \alpha \rangle$$

Por lo que la posición del pasajero está determinada por

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$$

Evaluando en  $t = 8 \text{ s}$

$$\vec{r} = \langle 1.855, -4.71, 12.608 \rangle$$

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{dr}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \langle 5\cos\theta\cos\varphi, 5\cos\theta\cos\varphi, -5\sin\theta \rangle + \langle -\sin\theta\cos\varphi\sin\alpha, -\sin\theta\sin\varphi\sin\alpha, -\cos\theta\sin\alpha \rangle$$

$$\frac{dr}{d\alpha} = \langle 0, 0, 0 \rangle + \langle \sin\varphi\sin\alpha + \cos\theta\cos\varphi\cos\alpha, -\cos\varphi\sin\alpha + \cos\theta\sin\varphi\cos\alpha, -\sin\theta\cos\alpha \rangle$$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} = & \langle -5\sin\theta\sin\varphi, 5\sin\theta\cos\varphi, 0 \rangle \\ & + \langle -\cos\varphi\cos\alpha - \cos\theta\sin\varphi\sin\alpha, -\sin\varphi\cos\alpha + \cos\theta\cos\varphi\sin\alpha, 0 \rangle \end{aligned}$$

$$v_0 = \langle -5.036, 0.511, 1.966 \rangle$$

$$z = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$0 = 12.608 + 1.966t - \frac{1}{2}(9.81)t^2$$

$$t = 1.816 \text{ s}$$